ある群の自己同型・全射準同型・単射準同型について

On automorphisms, epimorphisms and monomorphisms of some groups

保坂 哲也, 中島 康文*
HOSAKA Tetsuya, NAKAJIMA Yasufumi

In this short note, we introduce the automorphism group, the epimorphism semigroup, the monomorphism semigroup and the homomorphism semigroup of a group $\mathbb{Q}^l \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$.

1. 序

本稿では, 群 $G = \mathbb{Q}^l \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ の自己同型群 $A(G)$, 準同型半群 $H(G)$, 全射準同型半群 $E(G)$, 単射準同型半群 $M(G)$ がどのようなものであるかを紹介する.

まず準備として, 次のように行列の集合を定義する.

$$M_{s,t}(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$M_{s,t}(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$M_t(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_s}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix} \middle| \; a_{1j} \in \mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, a_{sj} \in \mathbb{Z}_{n_s} \right\}$$

いま,

$$A_{11} \in M_{l,l}(\mathbb{Q}), A_{12} \in M_{l,m}(\mathbb{Q}), A_{13} \in M_{l,k}(\mathbb{Q}),$$

$$A_{21} \in M_{m,l}(\mathbb{Z}), A_{22} \in M_{m,m}(\mathbb{Z}), A_{23} \in M_{m,k}(\mathbb{Z}),$$

$$A_{31} \in M_l(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k}), A_{32} \in M_m(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k}), A_{33} \in M_k(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k})$$

*宇都宮大学大学院教育学研究科

に対して, $(l+m+k)\times(l+m+k)$ 行列 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ を考える. 特にいま, 群 $G=\mathbb{Q}^l\times\mathbb{Z}^m\times\mathbb{Z}_{n_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_k}$ の元を列ベクトル $\vec{x}$ と考え, $A\vec{x}$ が G の元であるとするとき,

$$A_{13}=0,\ A_{21}=0,\ A_{23}=0,\ A_{31}=0$$

を得る.

いま, 行列

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} A_{11}\in M_{l,l}(\mathbb{Q}), A_{12}\in M_{l,m}(\mathbb{Q}) \\ A_{22}\in M_{m,m}(\mathbb{Z}) \\ A_{32}\in M_m(\mathbb{Z}_{n_1},\cdots,\mathbb{Z}_{n_k}), A_{33}\in M_k(\mathbb{Z}_{n_1},\cdots,\mathbb{Z}_{n_k}) \end{array}$$

を考え, $f_A(\vec{x})=A\vec{x}$ によって $f_A:G\to G$ を定義すると, f_A は準同型となる. また, 逆に, G からそれ自身への任意の準同型 f に対して, $f=f_A$ となる上のような行列 A が一意的に存在する.

すなわち, G から自分自身への準同型は, 行列によって,

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} A_{11}\in M_{l,l}(\mathbb{Q}), A_{12}\in M_{l,m}(\mathbb{Q}) \\ A_{22}\in M_{m,m}(\mathbb{Z}) \\ A_{32}\in M_m(\mathbb{Z}_{n_1},\cdots,\mathbb{Z}_{n_k}), A_{33}\in M_k(\mathbb{Z}_{n_1},\cdots,\mathbb{Z}_{n_k}) \end{array}$$

と表すことができる.

群 $G=\mathbb{Q}^l\times\mathbb{Z}^m\times\mathbb{Z}_{n_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_k}$ の全射準同型, 単射準同型, 自己同型を表す行列がどのようなものであるかを以下で見ていく.

2. 有限の場合

G の全射準同型, 単射準同型を考えていく上で必要な注意として, まず有限の場合を考える. 有限群の全射自己準同型や単射自己準同型は自己同型と一致する.

結論としては,

$$\begin{aligned} A(\mathbb{Z}_{n_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_k}) &= E(\mathbb{Z}_{n_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_k}) = M(\mathbb{Z}_{n_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_k}) \\ &= \{A'\in M_k(\mathbb{Z}_{n_1},\cdots,\mathbb{Z}_{n_k}) \mid (detA', m_1\times\cdots\times m_k)=1\} \end{aligned}$$

が成り立つ.

この証明の概略は以下の通りである.

証明の概略.

まず, A' を $M_{k,k}(\mathbb{Z})$ の元と考える. $(detA', n_1 \times \cdots \times n_k) = 1$ のとき, $a = detA'$ とすると,

$$a \times b \equiv 1 \pmod{n_1 \times \cdots \times n_k}$$

となるような整数 b が存在する. $M_{k,k}(\mathbb{Z})$ の元である $B = a \times A'^{-1}$ を考えると,

$$A \times bB = \begin{pmatrix} ab & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ab \end{pmatrix} = abE$$

が成り立つ. いま,

$$ab \equiv 1 \pmod{n_1 \times \cdots \times n_k} \implies ab \equiv 1 \pmod{n_1}, \ \cdots, \ ab \equiv 1 \pmod{n_k}.$$

従って, $A' \in M_k(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k})$ に $M_k(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k})$ の中で逆行列が存在する必要十分条件は, $(detA', n_1 \times \cdots \times n_k) = 1$ であり,

$$\begin{aligned} A(\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}) &= E(\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}) = M(\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}) \\ &= \{A' \in M_k(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k}) \mid (detA', m_1 \times \cdots \times m_k) = 1\} \end{aligned}$$

を得る.

3. 全射準同型について

群 $G = \mathbb{Q}^l \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ の全射準同型を考える. いま, G から自分自身への準同型は, 行列によって,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} A_{11} \in M_{l,l}(\mathbb{Q}), A_{12} \in M_{l,m}(\mathbb{Q}) \\ A_{22} \in M_{m,m}(\mathbb{Z}) \\ A_{32} \in M_m(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k}), A_{33} \in M_k(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k}) \end{array}$$

と表されている.

$\mathbb{Z}_{n_i}$ の元を $\bar{a}$ と表すことにする.

f_A が全射であるための必要十分条件は，G の元 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$ に対して，

$f_A(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \cdots, f_A(\vec{x}_{l+m+n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$ となるような $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{l+m+n} \in G$ が存在することである．ここで，

$$X = (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{l+m+n}) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}$$

とすると，$AX = E$ であることから，

$$\begin{array}{lll} A_{11}X_{11} + A_{12}X_{21} = E & A_{11}X_{12} + A_{12}X_{22} = 0 & A_{11}X_{13} + A_{12}X_{23} = 0 \\ A_{22}X_{21} = 0 & A_{22}X_{22} = E & A_{22}X_{23} = 0 \\ A_{32}X_{21} + A_{33}X_{31} = 0 & A_{32}X_{22} + A_{33}X_{32} = 0 & A_{32}X_{23} + A_{33}X_{33} = E \end{array}$$

をみたす X_{ij} が存在することになる．これらの式から，

$$\begin{array}{lll} X_{11} = A_{11}^{-1} & X_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} & X_{13} = 0 \\ X_{21} = 0 & X_{22} = A_{22}^{-1} & X_{23} = 0 \\ X_{31} = 0 & X_{32} = -X_{33}A_{32}X_{22} & A_{33}X_{33} = E \end{array}$$

を得るので，従って，全射であるための必要十分条件は，

$$detA_{11} \neq 0,\ detA_{22} = \pm 1,\ (detA_{33}, n_1 \times \cdots \times n_k) = 1$$

である．従って，群 $G = \mathbb{Q}^l \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ の全射準同型半群 $E(G)$ は，

$$E(G) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} detA_{11} \neq 0 \\ detA_{22} = \pm 1 \\ (detA_{33}, n_1 \times \cdots \times n_k) = 1 \end{array} \right\}$$

と表せる．

4. 単射準同型について

次に群 $G = \mathbb{Q}^l \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ の単射準同型について考える．f_A が単射準同型であることの必要十分条件は $kerf_A = 0$ であることから，$G = \mathbb{Q}^l \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ の元 $\vec{x}$ について，「$f_A(\vec{x}) = \vec{0}$ ならば $\vec{x} = \vec{0}$」となる条件を考える．いま，

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x_1} \\ \vec{x_2} \\ \vec{x_3} \end{pmatrix} (\vec{x_1} \in \mathbb{Q}^l, \vec{x_2} \in \mathbb{Z}^m, \vec{x_3} \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k})$ と表すと,

$$\begin{pmatrix} A_{11}\vec{x_1} + A_{12}\vec{x_2} = \vec{0} \\ A_{22}\vec{x_2} = \vec{0} \\ A_{32}\vec{x_2} + A_{33}\vec{x_3} = \vec{0} \end{pmatrix} \text{ ならば } \vec{x_i} = \vec{0}$$

であればよい. これを解くと,

$$detA_{11} \neq 0,\ detA_{22} \neq 0,\ (detA_{33}, n_1 \times \cdots \times n_k) = 1$$

を得る. 従って, G の単射準同型半群 $M(G)$ は,

$$M(G) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} detA_{11} \neq 0 \\ detA_{22} \neq 0 \\ (detA_{33}, n_1 \times \cdots \times n_k) = 1 \end{array} \right\}$$

と表せる.

5. 自己同型について

群 $G = \mathbb{Q}^l \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ の自己同型群 $A(G)$ は, $A(G) = E(G) \cap M(G)$ より, 上述のことから,

$$A(G) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} detA_{11} \neq 0 \\ detA_{22} = \pm 1 \\ (detA_{33}, n_1 \times \cdots \times n_k) = 1 \end{array} \right\}$$

と表せる.

6. 有限生成アーベル群について

特に $l = 0$ のとき, $G = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ は有限生成アーベル群の一般の形となっている. G から自分自身への準同型を考えたとき, 準同型を表す行列は,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} A_{11} \in M_{m,m}(\mathbb{Z}) \\ A_{21} \in M_m(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k}), A_{22} \in M_k(\mathbb{Z}_{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}_{n_k}) \end{array}$$

と表すことができ, 全射準同型半群 $E(G)$, 単射準同型半群 $M(G)$, 自己同型群 $A(G)$ はそれぞれ,

$$E(G) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} detA_{11} = \pm 1 \\ (detA_{22}, n_1 \times \cdots \times n_k) = 1 \end{array} \right\}$$
$$M(G) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} detA_{11} \neq 0 \\ (detA_{22}, n_1 \times \cdots \times n_k) = 1 \end{array} \right\}$$
$$A(G) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} detA_{11} = \pm 1 \\ (detA_{22}, n_1 \times \cdots \times n_k) = 1 \end{array} \right\}$$

である.

7. Hopfian と co-hopfian について

群 G のいかなる全射自己準同型も自己同型になっているとき, G を *hopfian* とよび, いかなる単射自己準同型も自己同型になっているとき, G を *co-hopfian* とよぶ.

上のことから以下のことがわかる.

(1) $G = \mathbb{Q}^l \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ は hopfian である.

(2) $G = \mathbb{Q}^l \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ が co-hopfian となる必要十分条件は, $m = 0$ である.

(1′) 特に, 有限生成アーベル群は hopfian である.

(2′) 特に, 有限生成アーベル群 G が co-hopfian となる必要十分条件は, G が有限群となることである.

8. 今後の課題

今後は, より一般の群 G の自己同型群 $A(G)$, 準同型半群 $H(G)$, 全射準同型半群 $E(G)$, 単射準同型半群 $M(G)$ を調べていきたい. 特に, 例えば, Coxeter 群 W に対して, $A(W)$, $H(W)$, $E(W)$, $M(W)$ を求める問題は大変興味深い.

W が無限 Coxeter 群で最も簡単な $W = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ の場合には, W は指数有限の部分群として $\mathbb{Z}$ と同型な群を含み, 実際, この W は $\mathbb{Z}$ の場合と同様に co-hopfian とはならない. Coxeter 系 (W, S) の Davis 複体 $\Sigma(W, S)$ の形 (例えば, $\Sigma(W, S)$ がユークリッド空間となるなど) から, Coxeter 群 W の (non-)co-hopfian 性が導かれないか, など, Coxeter 群の hopfian 性, co-hopfian 性の問題も今後の課題としたい.